16. Obruče

Richard Hlubina

FMFI UK, Bratislava

Úvodné sústredenie TMF, Bratislava, 26.10.2012

Zadanie

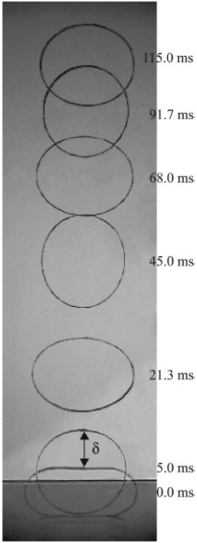
Elastickú obruč zatlačíme proti pevnému povrchu a náhle pustíme. Obruč môže vysoko vyskočiť. Preskúmajte, ako závisí výška výskoku od relevantných parametrov.

Literatúra

problém bol študovaný v článku

Eunjin Yang and Ho-Young Kim: Jumping hoops
American Journal of Physics, Vol. 80,
Issue 1 (January), p. 19 (2012)

(v prezentácii používam obrázky z tejto práce)



Fyzikálna predstava

1. deformovaná obruč má vyššiu energiu ako nedeformovaná; tento prebytok energie označme E_{el}

2. po odstránení prítlaku pominú dôvody, aby obruč zostala deformovaná

3. obruč sa bude snažiť odstrániť deformáciu, čo ju odtlačí od podložky

4. po odlepení od podložky sa deformačná energia E_{el} premení na energiu postupného pohybu E_{kin} a energiu vnútorných oscilácií E_{vib} obruče

5. v gravitačnom poli sa energia postupného pohybu E_{kin} premieňa na potenciálnu energiu (kolmý vrh)

hlavné úlohy:

a) zistiť počiatočnú rýchlosť postupného pohybu v_0,
t.j. prerozdelenie energie E_{el} medzi E_{kin} a E_{vib}

b) zistiť, či sa energia “nestráca” aj do iných stupňov voľnosti (podložka, vzduch, zahrievanie,...)

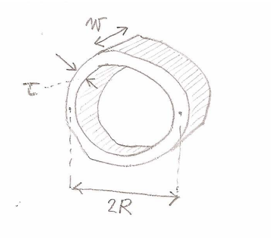
Relevantné parametre

Z fyzikálnej predstavy usudzujeme, že nasledovné parametre sú potenciálne relevantné

geometrické parametre obruče:
polomer R
šírka w
hrúbka τ

materiálové parametre obruče:
modul pružnosti E
hustota ρ
medza pevnosti σ_y

ostatné potenciálne relevantné parametre:
tuhosť podložky
odpor vzduchu



Minimálny model

obruč$\approx$ 2 hmotné body 1 a 2 s hmotnosťami $m/2$
súradnice bodov: z_1 a z_2, pričom $z_2 > z_1$

body spojené pružinou s tuhosťou K
pružina nedeformovaná pre vzdialenosť medzi bodmi
$z_2 - z_1 = L$

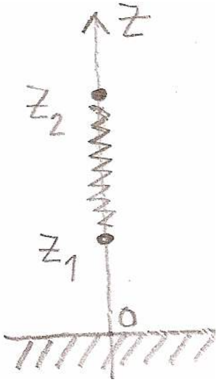
body sa nachádzajú v gravitačnom poli zeme g
a ich pohyb je (nekonečne tuhou podložkou)
obmedzený na hodnoty $z_1 > 0$ a $z_2 > 0$

Newtonove pohybové rovnice pre zrýchlenia a_1 a a_2:

$$\frac{m}{2}a_2 = F_2 = -\frac{m}{2}g - K(z_2 - z_1 - L)$$

$$\frac{m}{2}a_1 = F_1 = -\frac{m}{2}g + K(z_2 - z_1 - L)$$

výraz pre a_1 platí iba ak $F_1 > 0$; ináč $a_1 = 0$



Odbočka 1: numerické riešenie Newtonových rovníc

ak v čase $t = 0$ poznáme polohy $z_1(0)$ a $z_2(0)$ a rýchlosti $v_1(0)$ a $v_2(0)$, potom v neskoršom (blízkom) čase $t = \Delta t$ tieto veličiny vieme vypočítať

nové súradnice:
$z_1(\Delta t) = z_1(0) + v_1(0)\Delta t$
$z_2(\Delta t) = z_2(0) + v_2(0)\Delta t$

nové rýchlosti:
$v_1(\Delta t) = v_1(0) + a_1(0)\Delta t$
$v_2(\Delta t) = v_2(0) + a_2(0)\Delta t$

zrýchlenia na pravých stranách možno vypočítať z Newtonových rovníc
$a_2(0) = -g - \frac{2K}{m}(z_2(0) - z_1(0) - L)$
$a_1(0) = -g + \frac{2K}{m}(z_2(0) - z_1(0) - L)$ alebo $a_1(0) = 0$

iterovaním tohto postupu môžeme (numericky) vypočítať súradnice a hybnosti vo všetkých časoch, ktoré sú násobkami Δt

Odbočka 2: analytické riešenie Newtonových rovníc

rýchlosti sú (prvé) derivácie súradníc podľa času:
$v_1 = \frac{\Delta z_1}{\Delta t} = \dot{z}_1$
$v_2 = \frac{\Delta z_2}{\Delta t} = \dot{z}_2$

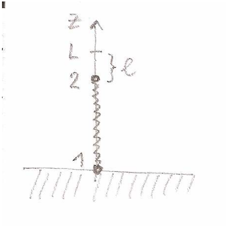
zrýchlenia sú (prvé) derivácie rýchlostí podľa času,
a teda druhé derivácie súradníc podľa času:
$a_1 = \frac{\Delta v_1}{\Delta t} = \frac{\Delta^2 z_1}{\Delta t^2} = \ddot{z}_1$
$a_2 = \frac{\Delta v_2}{\Delta t} = \frac{\Delta^2 z_2}{\Delta t^2} = \ddot{z}_2$

Newtonove rovnice teda možno zapísať v tvare, v ktorom vystupujú iba funkcie $z_1(t)$ a $z_2(t)$ a ich (druhé) derivácie:
$\ddot{z}_2(t) = -g - \frac{2K}{m}(z_2(t) - z_1(t) - L)$
$\ddot{z}_1(t) = -g + \frac{2K}{m}(z_2(t) - z_1(t) - L)$ alebo $\ddot{z}_1(t) = 0$

ak vieme derivovať, vieme overiť, či funkcie $z_1(t)$ a $z_2(t)$ spĺňajú tieto tzv. diferenciálne rovnice

funkcie $z_1(t)$, $z_2(t)$, $\dot{z}_1(t)$ a $\dot{z}_2(t)$ musia v čase $t = 0$ nadobúdať predpísané (tzv. počiatočné) hodnoty súradníc a hybností

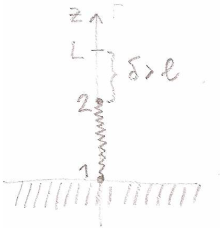
Minimálny model: počiatočná podmienka



rovnovážna konfigurácia modelu bez vonkajších síl; polohy častíc určené z rovníc $F_2 = F_1 = 0$

riešenie $z_1 = 0$, $z_2 = L - l$, kde

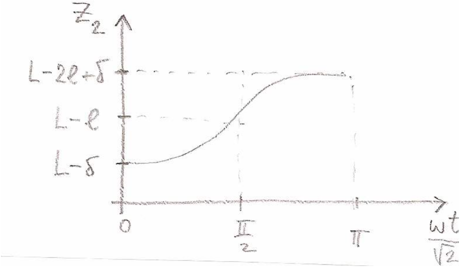
$$l = \frac{mg}{2K}$$



počiatočné konfigurácia po stlačení vonkajšou silou:
súradnice $z_1 = 0$, $z_2 = L - \delta$
rýchlosti $v_1 = v_2 = 0$
energia (vzhľadom k referenčnej konfigurácii bez deformácie):
$E_{\text{in}} = \frac{1}{2} K\delta^2 - \frac{1}{2} mg\delta$

Minimálny model: riešenie pre malé časy $t < t_1$

riešenie má spočiatku tvar
$z_1(t) = 0$
$z_2(t) = L - \delta + (\delta - l)\left(1 - \cos\frac{\omega t}{\sqrt{2}}\right)$ kde $\omega = \sqrt{\frac{4K}{m}}$



ak v čase t_1 súradnica z_2 nadobudne hodnotu $L + l$, potom sila F_1 začne byť kladnou a v tomto momente sa spodná častica odlepí od podložky
táto situácia nastane, iba ak $\delta > 3l$: malé stlačenia nevedú k výskoku struny!

Minimálny model: riešenie pre veľké časy $t > t_1$

počiatočné podmienky v čase $t_1 = \frac{\sqrt{2}}{\omega} \arccos \frac{2l}{l-\delta}$:

súradnice: $z_1(t_1) = 0$, $z_2(t_1) = L + l$

rýchlosti: $v_1(t_1) = 0$, $v_2(t_1) = \frac{g}{\omega l}\sqrt{2(\delta - 3l)(\delta + l)} = 2v_0$

v časoch $t = t_1 + \theta$: pohyb systému = pohyb ťažiska + vnútorné kmity

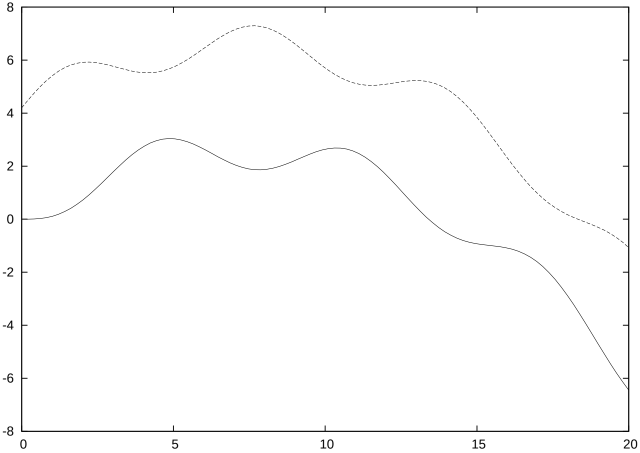
pohyb ťažiska: kolmý vrh s počiatočnou rýchlosťou v_0

vnútorný pohyb: kmity s frekvenciou ω

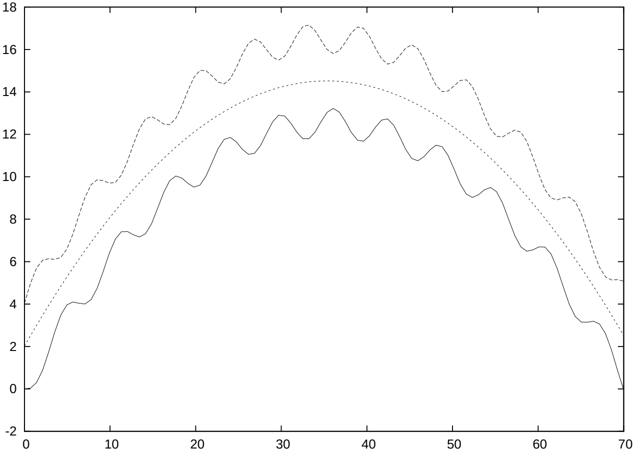
súradnice častíc:

$$z_1(\theta) = \frac{l}{2}(1 - \cos\omega\theta) + v_0(\theta - \frac{\sin\omega\theta}{\omega}) - \frac{g}{2}\theta^2$$

$$z_2(\theta) = \frac{l}{2}(1 + \cos\omega\theta) + v_0(\theta + \frac{\sin\omega\theta}{\omega}) - \frac{g}{2}\theta^2 + L$$



súradnice z_1 a z_2 (v jednotkách $\delta/2$) ako funkcie bezrozmerného času $\omega\theta$; predpokladali sme, že $\frac{l}{\delta} = 0.1$ a $\frac{L}{\delta} = 2$



časový vývoj súradníc z_1, z_2 a polohy ťažiska (čiara bez oscilácií); tentokrát sme predpokladali, že $\frac{l}{\delta} = 0.02$ a $\frac{L}{\delta} = 2$

Minimálny model: výsledky

čo je výška odskoku?
do úvahy prichádza maximum kriviek $z_1(t)$ alebo $z_2(t)$,
prípadne $R(t)$ (kde $R = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$ je ťažisko telesa)
v limite $l \ll \delta$ sú výsledky pre všetky definície zhruba tie isté

predpokladajme teda $l \ll \delta$ a skúmajme polohu ťažiska:
kolmý vrh s "počiatočnou" (t.j. v čase t_1) rýchlosťou $v_0 \approx \sqrt{\frac{K\delta^2}{2m}}$
"počiatočná" kinetická energia $\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{4}K\delta^2 = \frac{1}{2}\times$ deformačná energia
maximálna výška $H = \frac{v_0^2}{2g} \approx \frac{K\delta^2}{4mg}$
čas dosiahnutia max. výšky $T = t_1 + \frac{v_0}{g} \approx \frac{\delta}{g}\sqrt{\frac{K}{2m}}$
pružinu sme na začiatku museli stláčať silou $F = K\delta$

Výsledky pre plný valec

skúmajme valec dĺžky L s podstavou S
stláčanie valca tlakom $p = F/S$ spôsobí relatívne skrátenie δ/L
Hookov zákon $p = E\delta/L$ možno prepísať ako stláčanie pružiny silou $F = K\delta$, pričom musí platiť $K = ES/L$
hmotnosť valca možno pomocou hustoty vyjadriť v tvare $m = \rho SL$

nahraďme K a m v minimálnom modeli veličinami E a ρ; dostaneme:

maximálna výška $H \approx \frac{K\delta^2}{4mg} = \frac{E}{4\rho g}\left(\frac{\delta}{L}\right)^2$
čas dosiahnutia max. výšky $T \approx \frac{\delta}{g}\sqrt{\frac{K}{2m}} = \frac{1}{g}\sqrt{\frac{E}{2\rho}}\frac{\delta}{L}$

výsledky pre H a T teda závisia iba od materiálových parametrov a od relatívneho predĺženia $\frac{\delta}{L}$, ktoré je zadané tlakom počiatočného stláčania p_0 a modulom E vzťahom $\frac{\delta}{L} = \frac{p_0}{E}$:

maximálna výška $H \approx \frac{p_0^2}{4\rho g E}$, čas dosiahnutia max. výšky $T \approx \frac{p_0}{g\sqrt{2\rho E}}$
aký materiál je optimálny?

Výsledky pre obruč

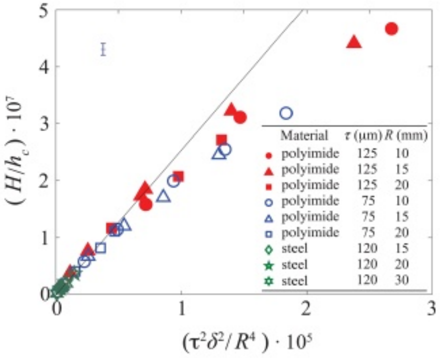
podľa teórie kontinua pre tenkú obruč $\tau \ll R$ platí $K \sim \frac{Ew\tau^3}{R^3}$
hmotnosť obruče je $m = 2\pi R w \tau \rho$

nahraďme K a m v minimálnom modeli veličinami E a ρ; dostaneme:

maximálna výška $H \approx \frac{K\delta^2}{4mg} \sim \frac{E}{\rho g} \left(\frac{\tau}{R}\right)^2 \left(\frac{\delta}{R}\right)^2$
čas dosiahnutia max. výšky $T \approx \frac{\delta}{g}\sqrt{\frac{K}{2m}} \sim \frac{1}{g}\sqrt{\frac{E}{\rho}}\frac{\tau}{R}\frac{\delta}{R}$

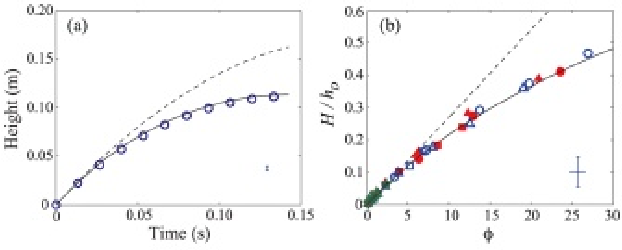
teda H a T opäť nezávisia od absolútnych rozmerov, ale iba od materiálových konštánt, tvaru obruče τ/R a relatívneho stlačenia δ/R

Experimentálne výsledky pre H (Yang-Kim)



dobrý súlad pre malé deformácie δ/R, odchýlky pre veľké deformácie

Vplyv trenia o vzduch (Yang-Kim)



vľavo: porovnanie experimentu a teórie pre časový vývoj výšky obruče po započítaní trenia o vzduch úmerného štvorcu rýchlosti

vpravo: porovnanie exp. a teor. závislosti maximálnej výšky skoku množstva vzoriek od parametra ϕ charakterizujúceho trenie o vzduch

Čo možno vylepšiť u Yang-Kim (teória)

z teoretických úvah Yang-Kim vyplýva, že pomer "počiatočnej" postupnej a vibračnej energie je $E_{\rm kin} : E_{\rm vib} = 8 : 5$, teda $E_{\rm kin}$ má predstavovať zlomok $8/13 = 0.62$ z energie deformovanej obruče $E_{\rm el}$; na fitovanie experimentu však používajú zlomok 0.57 - analýza teda nesedí

dve teoretické nepresnosti:

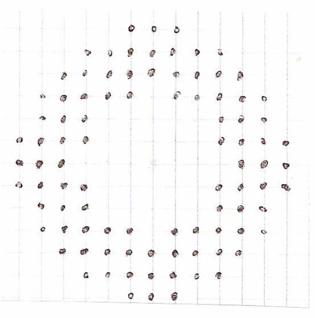
1. počiatočný tvar deformovanej obruče nemôže byť správny

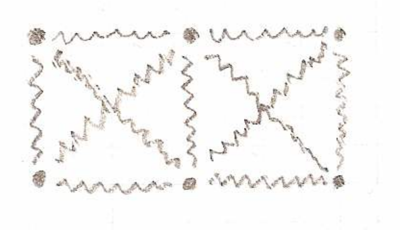
2. počiatočná frekvencia vibrácií musí byť iná ako frekvencia vibrácií po odlepení od zeme (v minimálnom modeli frekvencie $\omega/\sqrt{2}$ a ω: prečo?

možné vylepšenie analýzy:
numerická simulácia sady hmotných bodov pospájaných pružinkami

k analýze trenia o vzduch:
je zvolený model trenia správny? zdôvodniť - prípadne zmeniť

Pružinkový model

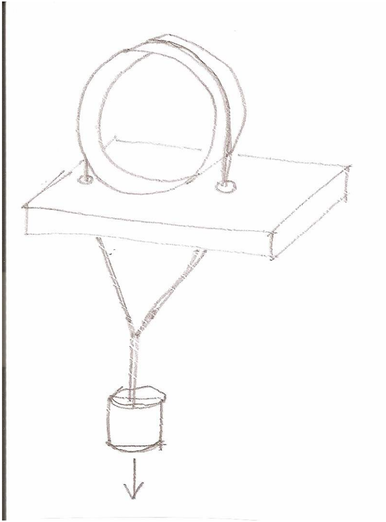




pružinky medzi hmotnými bodmi

hmotné body nedeformovanej mriežky

gravitácia v modeli nie je potrebná, stačí vypočítať “počiatočnú” posuvnú rýchlosť (tesne po odlepení)



zariadenie na kontrolovaný prítlak a meranie závislosti sily F_0 od deformácie δ

uvoľnenie obruče: prestrihnutím lanka

pozorovanie odskoku: rýchlobežný fotoaparát (v zábere aj kalibračné pravítko)

Optimalizácia experimentu

maximálna výška $H \sim \frac{E}{\rho g}\left(\frac{\tau}{R}\right)^2\left(\frac{\delta}{R}\right)^2$

obmedzenia maximálnej deformácie:
1. geometria: $\frac{\delta}{R} < 2 - \frac{\tau}{R}$
2. maximálna deformačná sila $F_{\max}$: $\frac{\delta}{R} < \frac{1}{E}\frac{F_{\max}}{Rw}\left(\frac{R}{\tau}\right)^3$
3. medza pevnosti σ_y: $\frac{\delta}{R} < \frac{\sigma_y}{E}\left(\frac{R}{\tau}\right)^3$

obmedzenia 2 a 3 možno zapísať naraz: $\left(\frac{\tau}{R}\right)^3\frac{\delta}{R} < \frac{\sigma_0}{E}$, kde $\sigma_0 = \min(\sigma_y, \frac{F_{\max}}{Rw})$

keďže obvykle $\sigma_0 \ll E$, kombinovaním s obmedzením 1 vidno, že maximálne H sa pri splnení podmienok 1 až 3 dosiahne pre:

$\frac{\delta}{R} \sim 1$ (veľké deformácie)
$\frac{\tau}{R} \sim \left(\frac{\sigma_0}{E}\right)^{1/3}$ (tenké obruče)
pri takejto voľbe $H \sim \frac{(E\sigma_0^2)^{1/3}}{\rho g}$